МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Интерполяция кубическим сплайном

**Выполнил**:

студент группы 381606-3

Ю.А Родимков

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Подпись

**Проверил:**

К.ф.-м.н.,страший преподаваиетль А.И. Эгамов

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Подпись

Нижний Новгород

2018

# Введение

Пусть у вас имеются значения функции, измеренные в нескольких точках, возникает задача, как найти значения функции в промежуточных точках. Такая задача называется задачей интерполяции и часто возникает на практике. Дадим более подробное определение.

**Интерполяция** — способ приближенного вычисления значения величины, находящейся между двумя известными значениями. Данный способ часто используется в расчетах, где приходится оперировать наборами дискретных значений, полученных в результате эксперимента или методом случайной выборки. Сама по себе задача считается не из легких, и свое решение находит в большом объеме решений.

Обычно задача интерполирования ставится в следующей форме: найти многочлен P(x)=Pn(x) степени не выше n, значения которого в точках xi (i=0,1,2,..., n) совпадают со значениями данной функции, т. е. P(xi)=yi.

Геометрически это означает, что нужно найти алгебраическую кривую вида , проходящую через заданную систему точек Mi(xi,yi) (i=0, 1, ...,n) Рис.1



Рис.1 Геометрический смысл

В данной работе для интерполяции мы будем использовать кубический сплайн. Интерполяция сплайнами третьего порядка - это быстрый, эффективный и устойчивый способ интерполяции функций. В основе сплайн-интерполяции лежит следующий принцип. Интервал интерполяции разбивается на небольшие отрезки, на каждом из которых функция задается полиномом третьей степени.

Сплайн – функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке [a,b], а на каждом частичном отрезке [в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом. Степенью сплайна называется максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов

На практике наиболее часто используются кубические сплайны http://statistica.ru/upload/medialibrary/interpolyaciya-splaynami/image003.png- сплайны третьей. Между двумя точками строиться многочлен третьей степени , который в точках интерполяции принимает значения интерполируемой функции и непрерывен вместе со своими (n-1) производными. Такой кусочно-непрерывный интерполяционный многочлен называется сплайном.

# Интерполяция функции кубическими сплайнами

Пусть некоторая функция f(x) задана на отрезке [a,b] , разбитом на части , . [Кубическим](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1_%28%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%29) [сплайном](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%B9%D0%BD) называется [функция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) , которая:

* на каждом отрезке является [многочленом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%87%D0%BB%D0%B5%D0%BD) степени третьей;
* имеет непрерывные первую и вторую [производные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) на всём отрезке [a,b];
* в точках выполняется равенство,т.е. сплайн [интерполирует](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D1%8F) функцию f(x) в точках .

Также для однозначного задания сплайна мы будем использовать естественные граничные условия.

Теорема: Для любой функции f(x) и любого разбиения отрезка [a,b] существует ровно один естественный сплайн , удовлетворяющий перечисленным выше условиям.

# Построение сплайнов

Обозначим:

На каждом отрезке функция есть полином третьей степени , коэффициенты которого надо определить. Запишем для удобства в виде:

тогда

Условия непрерывности всех производных до второго порядка включительно записываются в виде:

Условия интерполяции в виде: , т. е. значения в точках f(x) и её приближения должны совпадать.

Отсюда получаем формулы для вычисления коэффициентов сплайна:

**(1)**

**(2)**

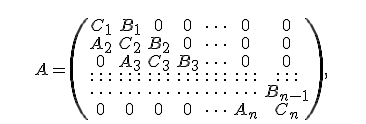
**(3)**

**(4)**

Если учесть, что , то вычисление можно провести с помощью [метода прогонки](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D0%B8) для [трёхдиагональной матрицы](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D1%91%D1%85%D0%B4%D0%B8%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0).

# Метод прогонки

Метод прогонки (алгоритм Томаса) используют для решения [СЛУ](https://www.calc.ru/Lineynyye-Uravneniya-Sistema-Lineynykh-Uravneniy.html) типа  *Ax=F*, где *A* — трёхдиагональная матрица. Трёхдиагональная матрица выглядит следующим образом:



Уравнение **(2)**можно решить методом прогонки, представив в виде системы линейных алгебраических уравнений вида , где вектор соответствует вектору , вектор поэлементно равен правой части уравнения.

где

Данный метод основан на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением: . Используя это соотношение, выразим и через и подставим в i-e уравнение:

Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать

Отсюда следует:

Из первого уравнения получим:

После нахождения коэффициентов получим решение системы:

# Руководство пользователя

Реализованная программа позволяет интерполировать функцию по точкам.

Приведем пример. Пусть даны точки (-3;4),(-1;2),(1;2),(3;4), необходимо построить кубический сплайн для интерполяции.

Программа предоставляет пользователю возможность выбора шага построения сплайна.

Результат работы программы выводится в виде графика, который отображает интерполированную функцию, и точки, которые были заданы.

# Заключение

В результате была написана программа, которая строит кубический сплайн по заданным точкам. Также был реализован дружественный интерфейс, отображение на графике заданных точек и сохранение коэффициентов сплайна в файл. Работа программы протестирована на нескольких примерах, в частности на примере приведенном выше.

**Список литературы**

1. Костомаров Д. П., Фаворский А. П. Вводные лекции по численным методам

2. Самарский А.А. “Введение в численный методы”, Наука, 1982 г.